



Lesmateriaal

Algebraïsche vaardigheden: rationale
lettervormen ⁽¹⁾

Doelgroep:

2e graad doorstroom met 5 lestijden per week

www.wiskundeplan.be

¹ Deze bundel is gebaseerd op oefenmateriaal ontwikkeld door de vakgroep wiskunde 3e graad van het Sint-Pieterscollege in Leuven.

Terugblik

Rationale vormen of gebroken lettervormen zijn “*breuken met letters*”.

- Vereenvoudigen

1. Ontbind eerst de teller en de noemer in factoren.
2. Deel vervolgens teller en noemer door hun gemeenschappelijke factoren.

$$\frac{a^2b}{5ab^3} = \frac{a}{5b^2}$$

$$\frac{a-b}{a^2-b^2} = \frac{a-b}{(a-b)(a+b)} = \frac{1}{a+b}$$

$$\frac{-x^3+x^2+2x-2}{x^2-1} = \frac{(x-1)(-x^2+2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{-x^2+2}{x+1}$$

- Optellen van twee rationale vormen

1. Ontbind de noemers in factoren.
2. Zet de breuken op gelijke noemer: dit is het kleinste gemeen veelvoud van de factoren in de noemers.
3. Tel de tellers op en behoud de noemers. (De noemers blijven standaard ontbonden.)
4. Vergeet niet de uitkomst te vereenvoudigen.

$$\begin{aligned} \frac{1}{a-b} + \frac{3}{b-a} \\ &= \frac{1}{a-b} + \frac{-3}{a-b} \\ &= \frac{1-3}{a-b} \\ &= \frac{-2}{a-b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-1}{x^2+2x} + \frac{2}{x^2-4} \\ &= \frac{-1}{x(x+2)} + \frac{2}{(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{-1}{x(x+2)} \cdot \frac{(x-2)}{(x-2)} + \frac{2}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x}{x} \\ &= \frac{-x+2+2x}{x(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{x+2}{x(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{1}{x(x-2)} \end{aligned}$$

- Vermenigvuldigen van twee rationale vormen

1. Vermenigvuldig de tellers met elkaar en de noemers met elkaar.
2. Vergeet niet de uitkomst te vereenvoudigen.

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-ab} \cdot \frac{3a^2}{2a+2b} = \frac{(a^2+2ab+b^2) \cdot (3a^2)}{(a^2-ab) \cdot (2a+2b)} = \frac{(a+b)^2 \cdot 3a^2}{a(a-b) \cdot 2(a+b)} = \frac{3a(a+b)}{2(a-b)}$$

Merk op dat je vóór het vermenigvuldigen ook al ‘kruisgewijs’ kunt vereenvoudigen: eenzelfde factor uit de teller van een breuk en de noemer van een andere breuk weglaten.

• Delen van twee rationale vormen

Maak gebruik van de rekenregel $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

Dit mag enkel wanneer de teller en de noemer allebei een breuk zijn.

$$1 + \frac{a}{a-1} = \frac{a+3}{a-1+a} = \frac{a+3}{2a-1} = (a+3) \cdot \frac{a-1}{2a-1} = \frac{(a+3)(a-1)}{2a-1}$$

- Afspraak: we vereenvoudigen zoveel mogelijk, van zodra we kunnen.

Niveau

1. Vereenvoudig indien mogelijk.

1 $\frac{x^2-y^2}{x-y}$

2 $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$

3 $\frac{a^2-9}{a^2-6a+9}$

4 $\frac{x^4-a^4}{x^2-a^2}$

5 $\frac{2x^2-5x+3}{-4x^2+8x-3}$

2. Pas eerst (kruisgewijs) vereenvoudigen toe vooraleer de breuken te vermenigvuldigen

1 $\frac{3(a-b)}{a(a+b)} \cdot \frac{a^2}{9(a-b)}$

2 $\frac{(x+3)^2}{(x+3)(x-2)} \cdot \frac{x+1}{x+3}$

3 $\frac{(x+1)(x-2)}{x^2(x+3)} \cdot \frac{x^2}{(x-3)(x+1)}$

4 $\frac{4(x-2)}{10(x+2)^2} \cdot \frac{15(x+2)}{2(x-1)}$

5 $\frac{6a^3}{a+4} \cdot \frac{(a+4)^2}{24a^2}$

Niveau

3. Vereenvoudig indien mogelijk.

1 $\frac{(b-a)^3}{a^2-b^2}$

2 $\frac{x^2+1}{x^4+2x^2+1}$

3 $\frac{4x^2-12xy+9y^2}{4x^2-9y^2}$

4 $\frac{(2x-y)^2-(x+3y)^2}{(3x-y)^2-(2x+3y)^2}$

5 $\frac{a^2b+ac-ab^2c-bc^2}{a^2c-ab-abc^2+b^2c}$

6 $\frac{x^3-8}{2x^3+2x^2-8x-8}$

7 $\frac{(x-3)(x-2)-2}{x-1}$

8 $\frac{(x-2)(x+5)+(x+1)}{x-2}$

9 $\frac{2a(a+2)-(a^2-a-6)}{(a+2)^3}$

10 $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{-2x^3-8x^2-10x-4}$

4. Vereenvoudig indien mogelijk. Zonder eerst in teller en noemer de gemeenschappelijke factoren af.

1 $\frac{3x^4-3x^2}{x^4+x^2}$

2 $\frac{a^2-ab}{b^2-ab}$

3 $\frac{a^2-a^6}{-a^7+a^5}$

4 $\frac{2(x-2)+(x-2)x^2}{x-2}$

5 $\frac{(4a-1)b+(1-4a)c}{b-c}$

6 $\frac{x^3+6x^2+9x}{x^3-9x}$

7 $\frac{2x-1+(2x-1)^2}{(2x-1)^3}$

8 $\frac{(x-1)^3-3(x+1)(1-x)^2}{(x-1)^6}$

9 $\frac{2a(a^2+3)-a^2 \cdot 2a}{a(a^2+3)^2}$

10 $\frac{ax+bx+ay+by+az+bz}{a+b}$

5. Bereken en vereenvoudig indien mogelijk

$$1 \quad \frac{3}{x+1} + \frac{2x+1}{x-2}$$

$$2 \quad \frac{4a+1}{a+2} + \frac{5a}{3(a+2)}$$

$$3 \quad \frac{2x+3}{2x-3} + \frac{7}{x}$$

$$4 \quad \frac{4x+1}{2x-3} + \frac{2x+4}{3-2x}$$

$$5 \quad 1 - \frac{x-2}{3x+7}$$

$$6 \quad \frac{a}{5} - \frac{a+2}{3a}$$

$$7 \quad \frac{2x-1}{x-5} + \frac{x+5}{2x+1}$$

$$8 \quad \frac{x-4}{x-1} - \frac{x-1}{x-4}$$

$$9 \quad \frac{x}{x-4} + \frac{x-8}{x-4}$$

$$10 \quad \frac{a}{a-2} + \frac{2a-1}{2-a}$$

6. Bereken en vereenvoudig indien mogelijk.

$$1 \quad \frac{2a^2}{(a-1)(a+1)} - \frac{a^2+1}{a^2-1}$$

$$2 \quad \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-a)^2}$$

$$3 \quad \frac{1}{x-1} + \frac{x+1}{(x-1)(x-3)}$$

$$4 \quad \frac{8}{(2+x)(x-2)} + \frac{2}{2-x}$$

$$5 \quad \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(1-x)(1+x)}$$

$$6 \quad \frac{4}{2+x} - \frac{8}{4-x^2} + \frac{2}{x-2}$$

$$7 \quad \frac{x-1}{2x-1} + \frac{2}{x-1} - \frac{x}{1-2x}$$

$$8 \quad \frac{5x-9}{(x+2)(x-3)} + \frac{x-3}{(x+1)(x+2)}$$

$$9 \quad \frac{x-3}{(x-1)(x-2)} - \frac{x-1}{(x-2)(x-3)}$$

$$10 \quad \frac{2x-3}{(2x-1)(x-1)} + \frac{x+3}{(2x-1)(2x+3)}$$

7. Bereken en vereenvoudig indien mogelijk.

$$1 \quad \frac{x+6}{x^2-16} - \frac{x+1}{x^2-4x}$$

$$2 \quad \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} - \frac{4}{x^2-1}$$

$$3 \quad \frac{4x}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-5x+6}$$

$$4 \quad \frac{3}{x^3-1} - \frac{2}{x^2-1}$$

$$5 \quad \frac{1}{x^2-x-2} - \frac{1}{x^3-4x^2+5x-2}$$

$$6 \quad \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2} - \frac{a^2b+ab^2}{a^2+ab}$$

$$7 \quad \frac{a^4}{a^4-b^4} + \frac{1}{a^2-b^2} - 1$$

$$8 \quad \frac{1}{x-y} - \frac{3xy}{x^3-y^3}$$

$$9 \quad \frac{2a}{a^3+a^2b-ab^2-b^3} - \frac{1}{a^2-b^2}$$

$$10 \quad \frac{1}{a^2-a} - \frac{1}{a^2+a} + \frac{2a^5}{a^2-a^4}$$

8. Bereken en vereenvoudig indien mogelijk.

$$1 \quad \frac{x^2-x}{x-1} \cdot \frac{5x-5}{1-x}$$

$$2 \quad \frac{x^3-8}{x^3+8} \cdot \frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$$

$$3 \quad \frac{xy+y^2}{(x-y)^2} \cdot \frac{x^2-xy}{(x+y)^2}$$

$$4 \quad \frac{2a^2+2ab}{ab-b^2} \cdot \frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}$$

$$5 \quad \frac{x^2+3x-10}{2x} \cdot \frac{x^2-3x}{x^2-5x+6}$$

9. Bereken en vereenvoudig indien mogelijk

$$1 \quad \left(1 - \frac{1}{x-2}\right) \left(x - 3 + \frac{1}{x-3}\right)$$

$$2 \quad \left(x - \frac{x+2}{x}\right) \left(5 - \frac{1}{x+1}\right)$$

$$3 \quad \left(x - \frac{x-y}{1+xy}\right) \left(x - \frac{2}{x+1}\right)$$

$$4 \quad \left(3 - \frac{1}{a+2}\right) \left(a + 1 + \frac{2a+1}{a-1}\right)$$

$$5 \quad \left(\frac{b+a}{b+2a} - \frac{b-a}{b-2a}\right) \left(\frac{b^2}{a^2} - 4\right)$$

10. Bereken en vereenvoudig indien mogelijk.

$$1 \quad \frac{\frac{5x^2-5}{x^2}}{\frac{6x+6}{x^3}}$$

$$2 \quad \frac{\frac{x^2+5x+6}{x^2+6x+5}}{\frac{x^2+4x+4}{x^2+7x+10}}$$

$$3 \quad \frac{3 + \frac{1}{x-2}}{3 - \frac{1}{x-5}}$$

$$4 \quad \frac{x - \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x}}$$

$$5 \quad \frac{\frac{1}{a-b} + 1}{\frac{1}{a-b} - 1}$$

$$6 \quad \frac{\frac{(x-3)^2}{x}}{x^2-9}$$

$$7 \quad \frac{5 + \frac{3}{x+1}}{5}$$

$$8 \quad \frac{\frac{x+2}{3} - 2}{x+4}$$

$$9 \quad \frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \cdot \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right)$$

$$10 \quad \frac{1}{1 + \frac{4x^2}{(x^2-1)^2}} \cdot \frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^2}$$

11. Bereken en vereenvoudig indien mogelijk

$$1 \quad \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^{-1}$$

$$2 \quad \left(\frac{a}{a-b} - \frac{b}{b-a} \right)^{-1}$$

$$3 \quad (y^{-2} - x^{-2}) \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right)^{-1}$$

12. Bereken en vereenvoudig indien mogelijk

$$1 \quad \frac{(a-1)^3 - (a+1)(a-1)^2}{(a-1)^6}$$

$$2 \quad \frac{3x+3}{x^2-2x} - \frac{2x+2}{x^2-4}$$

$$3 \quad \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} \right) \cdot \frac{y}{1 - \frac{y}{x}}$$

$$4 \quad \frac{1+t}{1-t^2} + \frac{1+t}{(1-t)^2}$$

$$5 \quad \frac{x^2 - y^2 + x + y}{x + y}$$

$$6 \quad \frac{\frac{1}{y} - y}{1 - \frac{1}{y}}$$

$$7 \quad \frac{1+x}{1+2x+x^2} - \frac{1+x}{1+x^3}$$

$$8 \quad \frac{\frac{x^2-4}{(x-2)^2}}{x+2}$$

$$9 \quad \frac{\frac{x^2-4}{(x-2)^2}}{x+2}$$

$$10 \quad \frac{1}{\frac{a-b}{ab}} \cdot \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right)$$

$$11 \quad \frac{1}{a^2-2a} + 5 + \frac{6}{2-a}$$

$$12 \quad \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

$$13 \quad \frac{\frac{x+2y}{\frac{1}{x} - \frac{2}{y}}}{x}$$

$$14 \quad \frac{(x-a)(x^2+2ax+a^2)}{x^3+a^3} \cdot \frac{x^2-ax+a^2}{x^3-a^3}$$

$$15 \quad \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2} \cdot \frac{x-y}{(x+y)^2}$$

$$16 \quad (y^{-2} - x^{-2}) \cdot \frac{y}{1-yx^{-1}}$$

$$17 \quad \left(1 - \frac{1}{x} \right) \left(2 - \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{1}{x^2-3x+2}$$

$$18 \quad \frac{2x+3}{x^2-7x+12} - \frac{2}{x-3}$$

$$19 \quad (2x^2 - x - 6) : \left(\frac{4}{x^2} - 1 \right)$$

$$20 \quad \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}}$$

Niveau

13. Bereken en vereenvoudig indien mogelijk.

$$1 \quad 1 - \frac{a-b \cdot \frac{a-b}{a+b}}{b-a \cdot \frac{a+b}{a-b}}$$

$$2 \quad \frac{-(x + \frac{a^2}{x+a})(a + \frac{x^2}{a-x})}{x^6 - a^6} \cdot (x^2 - a^2)^2$$

$$3 \quad \frac{a}{a^2-b^2} + \frac{a^2-ab+b^2}{b^3-a^3} - \frac{b}{(a+b)^2}$$

$$4 \quad \frac{a^2+ab+b^2}{a^3+b^3} + \frac{a^2-ab+b^2}{a^3-b^3} + \frac{4ab^4}{a^6-b^6}$$

$$5 \quad \left(x + \frac{1}{x^2} + 3 \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) : \left(\frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2 \right)$$

$$6 \quad \frac{\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} + 2}{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} - 2} : \frac{\frac{a+2b}{a-2b} + \frac{a-2b}{a+2b} + 2}{\frac{a+2b}{a-2b} - \frac{a-2b}{a+2b} - 2}$$

Niveau

14. Bereken de waarde van de volgende oneindig doorlopende breuk (we noemen dit een 'kettingbreuk').

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}$$

Oplossingen

- 1** 1 $x + y$; 2 $\frac{x+1}{x-1}$; 3 $\frac{a+3}{a-3}$; 4 $x^2 + a^2$; 5 $\frac{1-x}{2x-1}$
- 2** 1 $\frac{a}{3a+3b}$; 2 $\frac{x+1}{x-2}$; 3 $\frac{x-2}{x^2-9}$; 4 $\frac{x-2}{x^2+x-2}$; 5 $\frac{1}{4}a(a+4)$
- 3** 1 $\frac{-(a-b)^2}{a+b}$; 2 $\frac{1}{x^2+1}$; 3 $\frac{2x-3y}{2x+3y}$; 4 $\frac{3x+2y}{5x+2y}$; 5 $\frac{ab+c}{ac-b}$; 6 $\frac{x^2+2x+4}{2(x+2)(x+1)}$; 7 $x-4$; 8 $\frac{x^2+4x-9}{x-2}$; 9 $\frac{a+3}{(a+2)^2}$;
 10 $\frac{-(x+1)}{2(x+2)}$
- 4** 1 $\frac{3(x^2-1)}{x^2+1}$; 2 $-\frac{a}{b}$; 3 $\frac{a^2+1}{a^3}$; 4 $x^2 + 2$; 5 $4a - 1$; 6 $\frac{x+3}{x-3}$; 7 $\frac{2x}{(2x-1)^2}$; 8 $\frac{2(x+2)}{(x-1)^4}$; 9 $\frac{6}{(a^2+3)^2}$; 10 $x + y + z$
- 5** 1 $\frac{2x^2+6x-5}{(x-2)(x+1)}$; 2 $\frac{17a+3}{3(a+2)}$; 3 $\frac{2x^2+17x-21}{x(2x-3)}$; 4 1; 5 $\frac{2x+9}{3x+7}$; 6 $\frac{3a^2-5a-10}{15a}$; 7 $\frac{5x^2-26}{(x-5)(2x+1)}$; 8 $\frac{-3(2x-5)}{(x-4)(x-1)}$; 9 2;
 10 $-\frac{a-1}{a-2}$
- 6** 1 1; 2 $\frac{2}{(a-b)^2}$; 3 $\frac{2}{x-3}$; 4 $\frac{-2}{x+2}$; 5 $\frac{2}{x+1}$; 6 $\frac{2(3x+2)}{(x-2)(x+2)}$; 7 $\frac{x+1}{x-1}$; 8 $\frac{2x(3x-5)}{(x+1)(x+2)(x-3)}$; 9 $\frac{-4}{(x-3)(x-1)}$;
 10 $\frac{5x^2+2x-12}{(x-1)(2x-1)(2x+3)}$
- 7** 1 $\frac{1}{x(x+4)}$; 2 2; 3 $\frac{2(2x-1)}{(x-3)(x+2)}$; 4 $\frac{-(2x+1)}{(x+1)(x^2+x+1)}$; 5 $\frac{x(x-3)}{(x-2)(x+1)(x^2-2x+1)}$; 6 $\frac{a^2}{a+b}$; 7 $\frac{a^2+b^2+b^4}{a^4-b^4}$; 8 $\frac{x-y}{x^2+xy+y^2}$;
 9 $\frac{1}{(a+b)^2}$; 10 $\frac{-2(a^2+1)}{a}$
- 8** 1 $-5x$; 2 $\frac{x^2+2x+4}{x^2-2x+4}$; 3 $\frac{xy}{x^2-y^2}$; 4 $\frac{2a}{b}$; 5 $\frac{1}{2}(x+5)$
- 9** 1 $\frac{x^2-6x+10}{x-2}$; 2 $\frac{(x-2)(5x+4)}{x}$; 3 $\frac{(x^2+1)(x^2+x-2)y}{(x+1)(xy+1)}$; 4 $\frac{a(3a+5)}{a-1}$; 5 $-\frac{2b}{a}$
- 10** 1 $\frac{5x(x-1)}{6}$; 2 $\frac{x+3}{x+1}$; 3 $\frac{(x-5)(3x-5)}{(x-2)(3x-16)}$; 4 $\frac{x^2-1}{x^2+1}$; 5 $\frac{-(a-b+1)}{a-b-1}$; 6 $\frac{x-3}{x(x+3)}$; 7 $\frac{5x+8}{5(x+1)}$; 8 $\frac{-(x+2)(x+4)}{2x+5}$; 9 $a + b$;
 10 $(x+1)^2$
- 11** 1 $\frac{ab}{a+b}$; 2 $\frac{a-b}{a+b}$; 3 $\frac{x+y}{xy}$
- 12** 1 $\frac{-2}{(a-1)^4}$; 2 $\frac{(x+1)(x+6)}{x(x^2-4)}$; 3 $\frac{x+y}{xy}$; 4 $\frac{2}{(1-t)^2}$; 5 $x - y + 1$; 6 $-(y+1)$; 7 $\frac{x(x-2)}{x^3+1}$; 8 $\frac{1}{x-2}$; 9 $\frac{(x+2)^2}{x-2}$;
 10 $-(a+b)$; 11 $\frac{5a^2-16a+1}{a^2-2a}$; 12 $\frac{xy}{x+y}$; 13 $\frac{xy(x+2y)}{y-2x}$; 14 $\frac{x+a}{x^2+ax+a^2}$; 15 $\frac{x-y}{(x+y)^3}$; 16 $\frac{x+y}{xy}$; 17 $\frac{2x-1}{x^2(x-2)}$;
 18 $\frac{11}{(x-4)(x-3)}$; 19 $\frac{-x^2(2x+3)}{x+2}$; 20 $\frac{-x(x-1)}{x-3}$
- 13** 1 $\frac{2a}{a+b}$; 2 1; 3 $\frac{2a^2 b^2}{(a-b)(a+b)^2 (a^2+ab+b^2)}$; 4 $\frac{2a}{a^2-b^2}$; 5 $x(x+1)$; 6 4
- 14** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Bronnen

Delta Nova

E. Jennekens - G. Deen, Wiskunde '68

WPP