



Lesmateriaal

Algebraïsche vaardigheden: ontbinden (¹)

Doelgroep:

2e graad doorstroom met 5 lestijden per week

www.wiskundeplan.be

¹ Deze bundel is gebaseerd op oefenmateriaal ontwikkeld door de vakgroep wiskunde 3e graad van het Sint-Pieterscollege in Leuven.

Overzicht

Ontbinden in factoren betekent: een som (van termen) omzetten in een product (van factoren).

De ontbindingstechnieken zijn gerangschikt van snelst naar traagst:

- | | |
|---|---|
| 1. Afzonderen | $24x^3 - 15x^2 + 3x = 3x(8x^2 - 5x + 1)$ |
| 2. Merkwaardige producten | |
| $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ | $25x^2 - 3 = (5x - \sqrt{3})(5x + \sqrt{3})$ |
| $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ | $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2$ |
| $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$ | $t^3 - 6t^2 + 12t - 8 = (t - 2)^3$ |
| 3. Samennemen 2 aan 2 | $3x^3 - 6x^2 + x - 2 = (3x^3 - 6x^2) + (x - 2)$
$= 3x^2(x - 2) + (x - 2)$
$= (x - 2)(3x^2 + 1)$ |

Afspraak: we ontbinden altijd zo ver mogelijk.

Niveau

1. Is de gegeven uitdrukking te beschouwen als een product of als een som?

- 1 $a \cdot b \cdot c + 1$
- 2 $(x + y)^2$
- 3 $a \cdot (4b + c)$
- 4 $x \cdot y + x \cdot z$
- 5 $a \cdot b \cdot (c + 1)$

2. Onderzoek telkens of je van links naar rechts ontbindt, uitwerkt, of geen van beide.

- 1 $(3a + b)^2 = 9a^2 + 6ab + b^2$
- 2 $4(x^2 - y^2) = 4x^2 - 4y^2$
- 3 $4(x^2 - y^2) = 4(x - y)(x + y)$
- 4 $3x^3 - 3x + 1 = 3x(x^2 - 1) + 1$
 $= 3x(x - 1)(x + 1) + 1$
- 5 $27a^3 - 27a^2b + 9ab^2 - b^3$
 $= (3a - b)^3$

3. Ontbind in factoren door af te zonderen.

- 1 $\sqrt{5}a - 3\sqrt{5}b$
- 2 $\sqrt{7}x^2 + 2\sqrt{7}$
- 3 $15a^2b + 12ab - 9ab^3$
- 4 $x(x + 4) - 2(x + 4)$
- 5 $2a(3a + 1) + 5b(3a + 1)$
- 6 $(x - 1)(x + 3) - 5(x + 3)$

- 7 $(y^2 + 3)(y - 2) + y - 2$
- 8 $(a + 4)(3a + 2) - 3a - 2$
- 9 $(x - 3)(2x + 3) - (4x + 1)(2x + 3)$
- 10 $3(x - 1) + (x - 1)^2$

4. Vul aan tot een merkwaardig product, indien mogelijk, en ontbind in dat geval.

- 1 $9x^2 + \dots x + 16$
- 2 $a^2 - 6ab + \dots$
- 3 $\dots y^4 - 42y^2 + 9$
- 4 $121x^2 - \dots x - 4$
- 5 $-81 - 4x^2 + \dots$

5. Ontbind de tweetermen in factoren.

- 1 $x^2 - 121$
- 2 $9x^2 + 16$
- 3 $16x^2 - 25$
- 4 $4 - 9y^2$
- 5 $36a^2 - 5$
- 6 $4a^2 - 81b^2$
- 7 $144x^2 - 49y^4$
- 8 $5x^2 - 3$
- 9 $-4x^2 + 25y^2$
- 10 $-1 + 7x^2$

6. Ontbind de drietermen in factoren.

- 1 $25x^2 - 20x + 4$
- 2 $x^4 + 6x^2 + 9$
- 3 $25a^2 - 30ab + 9b^2$

$$4 \quad 81 + 126t + 49t^2$$

$$5 \quad 121x^2 + 66xy^2 + 9y^4$$

7. Ontbind de viertermen in factoren door termen samen te nemen.

$$1 \quad 4x + 4y + ax + ay$$

$$2 \quad 3x + 5y + 6xy + 10y^2$$

$$3 \quad 2ax + 3a - 2bx - 3b$$

$$4 \quad 7ab + 14a + b + 2$$

$$5 \quad 1 - a - b + ab$$

$$6 \quad 5x^3 - x^2 + 35x - 7$$

$$7 \quad x^3 + x^2 + x + 1$$

$$8 \quad 2x^6 + 3x^4 + 6x^2 + 9$$

$$9 \quad a^2 - 6b - 2ab + 3a$$

$$10 \quad 12ab^2 - 1 - 4b^2 + 3a$$

Niveau

8. Ontbind zo ver mogelijk in factoren.

$$1 \quad 4a^3 - 25a$$

$$2 \quad x^4 - 1$$

$$3 \quad 18y^5 - 2y^3$$

$$4 \quad 32a^3b - 50ab^3$$

$$5 \quad 144x^3 - x$$

$$6 \quad 16a^4 - 9b^4$$

$$7 \quad -a^2 - 2ab - b^2$$

$$8 \quad 4x^5 - 28x^4 + 49x^3$$

$$9 \quad 8x^4y - 24x^3y^3 + 18x^2y^5$$

$$10 \quad (2x^2 + 3)(x + 1) - (x^2 + 4)(x + 1)$$

9. Ontbind in factoren.

$$1 \quad (x + y)^2 - 16$$

$$2 \quad (x + 2y)^2 - 25y^2$$

$$3 \quad (x + 1)^2 - 6(x + 1) + 9$$

$$4 \quad 4(2x + 3)^2 - 20(2x + 3) + 25$$

$$5 \quad 9(5x - y)^2 - 16(3x + 2y)^2$$

10. Ontbind in factoren. Geef voorrang aan de snelste ontbindingstechniek.

$$1 \quad 9x^2 - 81x^2y^2$$

$$2 \quad x^3 + x^2 - 4x - 4$$

$$3 \quad -x^6 - 4x^4 - 4x^2$$

$$4 \quad a^2 - (a + b + c)^2$$

$$5 \quad x^8 - 81$$

$$6 \quad a^2(a^2 - 3) - 4(a^2 - 3)$$

$$7 \quad (2x - 2)(3x + 4) - (x - 1)(2x - 1)$$

$$8 \quad -\sqrt{14}x^3y + \sqrt{21}x^2y + \sqrt{35}x^2y^2$$

$$9 \quad -18s^2t^3 + 84s^2t^2 - 98s^2t$$

$$10 \quad ac^2 + bd^2 - ad^2 - bc^2$$

$$11 \quad (3x + 4)^2 - 8(3x + 4) + 16$$

$$12 \quad x^3 - x^2 - x + 1$$

$$13 \quad 2x^3 - 13x^2 - 6x + 39$$

$$14 \quad (5x + 1)^2 + 4(5x + 1)$$

$$15 \quad ax^2 + bx^2 - 4a - 4b$$

$$16 \quad (4x^2 + 1)^2 - (12x - 8)(4x^2 + 1)$$

$$17 \quad \sqrt{8} - ab + \sqrt{2}b - 2a$$

$$18 \quad a^3 + b^3 + a^2b^2 + ab$$

$$19 \quad (a + 2b)^2 - (2a - b)^2$$

$$20 \quad (a - b)^3 + (a + b)^3$$

Niveau

11. Ontbind in factoren.

$$1 \quad \sqrt{18}xy^2z^3 + \sqrt{32}x^3y^2z$$

$$2 \quad 3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2$$

$$3 \quad 5y^2 + 2\sqrt{10}y + 2$$

$$4 \quad 8a^2 - 4\sqrt{6}a + 3$$

$$5 \quad \sqrt{5} - a - ab^2 + \sqrt{5}b^2$$

12. Ontbind in factoren.

$$1 \quad a + b + 5c + 4a^2b + 4ab^2 + 20abc$$

$$2 \quad p^2 + 2pq - 3pr - 3p - 6q + 9r$$

$$3 \quad a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2ab + 2cd$$

$$4 \quad a^2 + b^2 - c^2 + 2ab$$

$$5 \quad 4x^2 + 9y^2 - 16z^2 - 12xy$$

$$6 \quad x^2 - 4y^2 + 20y - 25$$

$$7 \quad x^2 + y^2 + 2ax - 2ay - 2xy$$

$$8 \quad x^6 - 2x^5 + x^4 - 4x^2 + 8x - 4$$

$$9 \quad 4a^2 + 4ab + b^2 - 2a - b$$

$$10 \quad \sqrt{3}x^2z - y^5 + xy^2z - \sqrt{3}xy^3$$

13. Ontbind in factoren.

$$1 \quad (7x^2 + 5x - 1)^2 - (x^2 - 5x - 1)^2$$

$$2 \quad (x - 2)(x - 3) - (2 - x)(2x - 3)$$

$$3 \quad 5x^2 - 4$$

$$4 \quad 4x^2 - 9y^2 + 2x + 3y$$

$$5 \quad 7\sqrt{7}x^6 + 21x^4 + 3\sqrt{7}x^2 + 9$$

$$6 \quad (x + 1)^4 - (x + 1)^2$$

$$7 \quad x^3 - x^2 + \frac{x}{4}$$

- 8 $a^6 - a^5 + \frac{1}{3}a^4 - \frac{1}{27}a^3$
- 9 $(x - 2y)^2 - 9(x + 2y)^2$
- 10 $(2a^2 + a + 2)^2 - (a^2 - 3a - 2)^2$
- 11 $(a^3 - b^3) - (a - b)^3$
- 12 $a^2 - 2a - 2b - b^2$
- 13 $x^2 - 6x + 9 - 9y^2$
- 14 $4x^2 + 4a - a^2 - 4$
- 15 $(x - 3)^2 + 8(x^2 - 9) + 16(x + 3)^2$

Niveau

14. Pas het principe uit het voorbeeld toe om de veeltermen te ontbinden.

Voorbeeld

$$\begin{aligned} & x^4 + x^2 + 1 \\ &= x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 \\ &= (x^2 + 1)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

- 1 $x^4 + 1$
- 2 $x^4 + 3x^2 + 4$
- 3 $x^4 - 3x^2 + 4$

15. VWO

De som van de kwadraten van de reële oplossingen van $x^{256} - 256^{32} = 0$ is:

- (A) 8
- (B) 128
- (C) 512
- (D) 65536
- (E) $2 \cdot 256^{32}$.

16. Finalevraag VWO 2012

Stel n een natuurlijk getal. Noem a het kleinste natuurlijk getal dat je van n moet aftrekken om een volkomen kwadraat te verkrijgen. Noem b het kleinste natuurlijk getal dat je bij n moet optellen om een volkomen kwadraat te verkrijgen. Bewijs dat $n - ab$ een volkomen kwadraat is.

Oplossingen

- 1** 1 som; 2 product; 3 product; 4 som; 5 product
- 2** 1 uitwerken; 2 uitwerken; 3 ontbinden; 4 geen van beide; 5 ontbinden
- 3** 1 $\sqrt{5}(a - 3b)$; 2 $\sqrt{7}(x^2 + 2)$; 3 $3ab(5a + 4 - 3b^2)$; 4 $(x + 4)(x - 2)$; 5 $(3a + 1)(2a + 5b)$;
6 $(x + 3)(x - 6)$; 7 $(y - 2)(y^2 + 4)$; 8 $(3a + 2)(a + 3)$; 9 $(2x + 3)(-3x - 4)$;
10 $(x - 1)(x + 2)$
- 4** 1 24; 2 $9b^2$; 3 49; 4 /; 5 $36x$
- 5** 1 $(x - 11)(x + 11)$; 2 /; 3 $(4x - 5)(4x + 5)$; 4 $(2 - 3y)(2 + 3y)$; 5 $(6a - \sqrt{5})(6a + \sqrt{5})$;
6 $(2a - 9b)(2a + 9b)$; 7 $(12x - 7y^2)(12x + 7y^2)$; 8 $(\sqrt{5}x - \sqrt{3})(\sqrt{5}x + \sqrt{3})$;
9 $(5y - 2x)(5y + 2x)$; 10 $(\sqrt{7}x - 1)(\sqrt{7}x + 1)$
- 6** 1 $(5x - 2)^2$; 2 $(x^2 + 3)^2$; 3 $(5a - 3b)^2$; 4 $(9 + 7t)^2$; 5 $(11x + 3y^2)^2$
- 7** 1 $(x + y)(4 + a)$; 2 $(3x + 5y)(1 + 2y)$; 3 $(2x + 3)(a - b)$; 4 $(b + 2)(7a + 1)$;
5 $(1 - a)(1 - b)$; 6 $(5x - 1)(x^2 + 7)$; 7 $(x + 1)(x^2 + 1)$; 8 $(2x^2 + 3)(x^4 + 3)$;
9 $(a - 2b)(a + 3)$; 10 $(3a - 1)(4b^2 + 1)$
- 8** 1 $a(2a - 5)(2a + 5)$; 2 $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$; 3 $2y^3(3y - 1)(3y + 1)$;
4 $2ab(4a - 5b)(4a + 5b)$; 5 $x(12x - 1)(12x + 1)$; 6 $(2a - \sqrt{3}b)(2a + \sqrt{3}b)(4a^2 + 3b^2)$;
7 $-(a + b)^2$; 8 $x^3(2x - 7)^2$; 9 $2x^2y(2x - 3y^2)^2$; 10 $(x + 1)^2(x - 1)$
- 9** 1 $(x + y - 4)(x + y + 4)$; 2 $(x - 3y)(x + 7y)$; 3 $(x - 2)^2$; 4 $(4x + 1)^2$;
5 $(3x - 11y)(27x + 5y)$
- 10** 1 $9x^2(1 - 3y)(1 + 3y)$ [technieken 1 & 2]; 2 $(x + 1)(x - 2)(x + 2)$ [3 & 2]; 3 $-x^2(x^2 + 2)^2$
[1 & 2]; 4 $-(b + c)(2a + b + c)$ [2 & 1]; 5 $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 3)(x^4 + 9)$ [2];
6 $(a - \sqrt{3})(a + \sqrt{3})(a - 2)(a + 2)$ [1 & 2]; 7 $(x - 1)(4x + 9)$ [1]; 8 $\sqrt{7}x^2y(-\sqrt{2}x + \sqrt{3} + \sqrt{5}y)$
[1]; 9 $-2s^2t(3t - 7)^2$ [1 & 2]; 10 $(a - b)(c - d)(c + d)$ [3 & 2]; 11 $9x^2$ [2];
12 $(x - 1)^2(x + 1)$ [3 & 2]; 13 $(2x - 13)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$ [3 & 2]; 14 $5(5x + 1)(x + 1)$ [1];
15 $(a + b)(x - 2)(x + 2)$ [3 & 2]; 16 $(4x^2 + 1)(2x - 3)^2$ [1 & 2]; 17 $(b + 2)(\sqrt{2} - a)$ [3];
18 $(a + b^2)(a^2 + b)$ [3]; 19 $(3a + b)(-a + 3b)$ [2]; 20 $2a(a^2 + 3b^2)$ [2 & 1]
- 11** 1 $\sqrt{2}xy^2z(3z^2 + 4x^2)$; 2 $(\sqrt{3}x + y)^2$; 3 $(\sqrt{5}y + \sqrt{2})^2$; 4 $(2\sqrt{2}a - \sqrt{3})^2$; 5 $-(a - \sqrt{5})(b^2 + 1)$
- 12** 1 $(a + b + 5c)(1 + 4ab)$; 2 $(p + 2q - 3r)(p - 3)$; 3 $(a + b + c - d)(a + b - c + d)$;
4 $(a + b + c)(a + b - c)$; 5 $(2x - 3y - 4z)(2x - 3y + 4z)$; 6 $(x + 2y - 5)(x - 2y + 5)$;
7 $(x - y)(x - y + 2a)$; 8 $(x - 1)^2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2)$; 9 $(2a + b)(2a + b - 1)$;
10 $(xz - y^3)(\sqrt{3}x + y^2)$
- 13** 1 $4x(3x + 5)(2x - 1)(2x + 1)$; 2 $3(x - 2)^2$; 3 $(\sqrt{5}x - 2)(\sqrt{5}x + 2)$; 4 $(2x + 3y)(2x - 3y + 1)$;
5 $(\sqrt{7}x^2 + 3)(7x^4 + 3)$; 6 $(x + 1)^2(x + 2)x$; 7 $\frac{1}{4}x(2x - 1)^2$; 8 $a^3(a - \frac{1}{3})^3$;
9 $-8(x + y)(x + 4y)$; 10 $a(3a - 2)(a + 2)^2$; 11 $3ab(a - b)$; 12 $(a + b)(a - b - 2)$;
13 $(x - 3y - 3)(x + 3y - 3)$; 14 $(2x + a - 2)(2x - a + 2)$; 15 $(5x + 9)^2$
- 14** 1 $(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$; 2 $(x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)$;
3 $(x^2 + \sqrt{7}x + 2)(x^2 - \sqrt{7}x + 2)$
- 15** A