Wiskundeplan

door en voor leerkrachten

Wiskundeleerplan tweede graad
voor de volgende richtingen uit de doorstroomfinaliteit
met 5 lesuren wiskunde:

Economische wetenschappen, Grieks-Latijn, Latijn, Natuurwetenschappen en Technologische wetenschappen

Voorlopige versie met evalueerbare doelen, wenken en links

Versie augustus 2023
(onder voorbehoud van goedkeuring)

www.wiskundeplan.be

Hoewel dit een graadleerplan is, is bij de grote rubrieken toch een suggestie vermeld voor het studiejaar.

Leerplandoelen die vooraf worden gegaan door een **U** zijn uitbreidingsleerstof, die afhankelijk van de leerling, klasgroep of de resterende tijd al dan niet behandeld kunnen worden.

Sommige onderdelen vormen ‘indicatorleerstof’: dit is leerstof die vaak een nuttige indicatie geeft over de slaagkansen van leerlingen in een sterke wiskunderichting in de derde graad.

Algemene doelen

A1 Wiskundige redeneringen beargumenteren en wiskundige uitspraken bewijzen. Bewijstechnieken: rechtstreeks bewijs, bewijs uit het ongerijmde, bewijs door tegenvoorbeeld.

Wenk *Bewijzen kunnen in licht gewijzigde vorm worden gereconstrueerd: met andere symbolen, vanaf een andere figuur, een specifiek geval...*

Link *Hier kan het verband worden gelegd met wat in de lessen logica aan bod komt.*

A2 Fenomenen uit de realiteit beschrijven aan de hand van wiskundige concepten.

A3 Vraagstukken oplossen en problemen oplossen door te mathematiseren en demathematiseren en door gebruik te maken van heuristieken.

A4 ICT gebruiken om berekeningen uit te voeren en grafische voorstellingen te maken.

A5 Wiskundige eigenschappen en redeneringen helder en doelmatig formuleren en noteren, met correct gebruik van vakterminologie.

Wenk *Hierbij gaat ook aandacht naar het correct gebruik van symbolen zoals de universele kwantor ('voor alle') en de existentiële kwantor ('er bestaat').*

A6 Illustreren dat wiskunde een component is van cultuur.

Meetkunde (3e jaar)

2ME01 – Stelling van Pythagoras (12 u)

1 De stelling van Pythagoras bewijzen.

Wenk *Het is zinvol om de leerlingen met meerdere bewijzen van de stelling van Pythagoras te confronteren. Zo ervaren ze dat het mogelijk is om op verschillende manieren tot eenzelfde besluit te komen.*

Wenk *De stelling van Pythagoras en de vele bewijzen die ervoor gegeven zijn door de eeuwen heen, kan een aanleiding zijn om even uit te weiden over een stukje geschiedenis van de wiskunde en de bijdragen hieraan van verschillende culturen en beschavingen.*

Wenk *In de context van de stelling van Pythagoras kan het idee van een fractaal aan bod komen, meer bepaald de boom van Pythagoras.*

2 De omgekeerde stelling van Pythagoras onderscheiden van de stelling van Pythagoras.

Wenk *Hoewel het bewijs van de omgekeerde stelling niet gegeven hoeft te worden, is het belangrijk te blijven stilstaan bij het belang van het onderscheid tussen een stelling en haar omgekeerde.*

Link *Dit sluit aan bij de lessen logica, waar leerlingen het onderscheid leren maken tussen een implicatie en een equivalentie.*

3 De stelling van Pythagoras en haar omgekeerde gebruiken om meetkundige problemen in het vlak en in de ruimte op te lossen, zoals het berekenen van lengtes, het verklaren van constructies van irrationale getallen en het bewijzen van eigenschappen.

Wenk *In de ruimte kan bijvoorbeeld de lengte van een lichaamsdiagonaal van een balk berekend worden.*

Wenk *Na de constructies van lijnstukken met lengte $\sqrt{2}$ en $\sqrt{3}$ kan stilgestaan worden bij de vraag welke getallen op die manier wel of niet geconstrueerd kunnen worden. Historisch interessant is bijvoorbeeld het probleem van de kwadratuur van de cirkel, waar meer dan 2000 jaar lang op gezocht werd.*

Wenk *De driehoeksongelijkheid kan hier bewezen worden.*

Wenk *De formule voor de afstand tussen twee punten (zie 2ME04) kan hier al aangebracht worden.*

2ME02 – Gelijkvormigheid, stelling van Thales (17 u)

1 Omschrijven wat gelijkvormige figuren en lichamen zijn en gelijkvormigheid in verband brengen met een gelijkvormigheidsfactor en schaal. Een gelijkvormigheidsfactor berekenen en in verband brengen met lengten, oppervlakten en inhouden van gelijkvormige figuren en lichamen.

2 Gelijkvormigheidskenmerken van driehoeken formuleren en gebruiken om problemen op te lossen.

3 Gelijkvormigheidskenmerken van driehoeken gebruiken om de eigenschappen van merkwaardige lijnen, zoals zwaartelijnen of een middenparallel, aan te tonen. Met gelijkvormigheidskenmerken de metrische betrekkingen in een rechthoekige driehoek aantonen.

4 Het beeld van een figuur bepalen door een evenwijdige projectie op een rechte volgens een bepaalde richting.

5 De stelling van Thales formuleren, bewijzen en gebruiken om problemen op te lossen.

Wenk *Ook de omgekeerde stelling van Thales kan hierbij aan bod komen.*

6 Het homothetiebeeld van een vlakke figuur bepalen en aantonen dat dit beeld gelijkvormig is met het origineel.

Wenk *Het kan leerrijk zijn om hier dieper in te gaan op de indeling van transformaties van het vlak in isometrieën (die congruente beelden opleveren en die in de eerste graad werden behandeld) en gelijkvormigheden (die gelijkvormige beelden opleveren). Ook de samenstelling van dergelijke transformaties kan aan bod komen.*

2ME03 – Driehoeksmeting in een rechthoekige driehoek (9 u)

1 De sinus, cosinus, tangens van een scherpe hoek als verhoudingen in een rechthoekige driehoek definiëren.

Wenk *De tangens als verhouding van sinus en cosinus volgt uit deze definitie. Omgekeerd kan de tangens van een scherpe hoek ook gedefinieerd worden als verhouding van sinus en cosinus van die hoek, waaruit dan de verhouding van rechthoekszijden volgt.*

2 Goniometrische getallen gebruiken om meetkundige problemen op te lossen.

Wenk *Het volstaat om zestigdelige graden als eenheid voor hoeken te gebruiken.*

3 De grondformule van de goniometrie voor scherpe hoeken formuleren en bewijzen.

2ME04 – Analytische meetkunde (10 u)

1 De afstand tussen twee punten in het vlak berekenen op basis van hun coördinaten.

Wenk *Dit kan al aan bod komen bij de stelling van Pythagoras (2ME01).*

2 De coördinaat van het midden van een lijnstuk berekenen.

Wenk *Deze formule kan o.a. met de stelling van Thales aangebracht worden, maar ook met vectoren.*

3 Een vergelijking opstellen van een rechte gegeven door een punt en de richtingscoëfficiënt of door twee punten.

4 Voor een rechte met vergelijking $y = mx + q$ de grafische betekenis onderzoeken, formuleren en verklaren van de parameters m en q.

5 De rechte met algemene vergelijking $ux + vy + w = 0$ bespreken.

Link *Het verband leggen tussen de vergelijking van een rechte (niet evenwijdig met de y-as) en de verwante eerstegraadsfunctie.*

6 De onderlinge ligging van twee rechten algebraïsch onderzoeken en grafisch interpreteren.

Wenk *Dit kan ook aan bod komen bij het oplossen van stelsels.*

7 Analytisch problemen oplossen en uitspraken bewijzen in het vlak.

Wenk *Voor het bewijzen van eigenschappen is het nuttig oordeelkundig een assenstelsel te leren kiezen.*

2ME05 – Vectoren (6 u)

1 Vectoren definiëren en de nodige basisbegrippen gebruiken, zoals nulvector, tegengestelde vector, norm van een vector.

2 Bewerkingen met vectoren uitvoeren: optelling (met kop-staartmethode en parallelogram-regel), scalaire vermenigvuldiging.

Wenk *Om deze bewerkingen meer betekenis te geven, kan het nuttig zijn na te gaan of ze aan gelijkaardige eigenschappen voldoen als de overeenkomstige bewerkingen met getallen, zoals commutativiteit, associativiteit, tegen-gestelde, distributiviteit…*

Wenk *Het verschil van vectoren kan, net zoals dat bij getallen gebeurde, gedefinieerd worden als de som met de tegengestelde.*

3 Een vector ontbinden in zijn componenten.

Wenk *Voor zowel de bewerkingen als het ontbinden in componenten zijn toepassingen uit de fysica mogelijk.*

Wenk *Dit leerplandoel kan ook bij het onderdeel Vectoren in het vierde jaar behandeld worden.*

4 De coördinaat van een vector, een som van vectoren, een scalair veelvoud van een vector en een getal bepalen.

Wenk *Dit leerplandoel kan ook bij het onderdeel Vectoren in het vierde jaar behandeld worden.*

U *Eigenschappen bewijzen met vectoren.*

Wenk *Mogelijke toepassingen zijn het opstellen van een formule voor de coördinaat van het midden van een lijnstuk, het bewijzen van de eigenschap van de middenparallel van een driehoek…*

Link *Het opstellen van een vergelijking van een rechte met behulp van vectoren wordt in het vierde jaar opgenomen.*

Algebra (3e jaar)

2AL01 – Reële getallen (19 u)

1 Een rationaal getal beschrijven als een repeterende decimale vorm en een irrationaal getal als een niet-repeterende decimale vorm. Reële getallen onderscheiden als de samenvoeging van rationale en irrationale getallen, dus als een getal zonder of met repeterend deel.

Link *Leerlingen zijn uit de eerste graad vertrouwd met begrippen uit de verzamelingenleer, waaronder deelverzamelingen.*

2 Uitleggen dat de reële getallen de getallenas 'vervolledigen': met elk punt van de getallenas komt een reëel getal overeen.

3 Bewijzen dat $\sqrt{2}$ irrationaal is.

Wenk *Het kan boeiend zijn te vermelden dat het voor sommige getallen honderden en voor π zelfs duizenden jaren geduurd heeft vooraleer men wist of ze rationaal dan wel irrationaal zijn.*

Wenk *Dit is mogelijk het eerste bewijs uit het ongerijmde (zie doel A1) dat leerlingen ontmoeten.*

4 Reële getallen ordenen.

5 Begrensde, onbegrensde, open, gesloten en halfopen intervallen definiëren als deelverzamelingen van de reële getallenverzameling.

Wenk *Intervallen kunnen gekoppeld worden aan dubbele of enkele ongelijkheden.*

Wenk *Leerlingen zijn uit de eerste graad vertrouwd met de begrippen unie, doorsnede en verschil, die hier opnieuw geoefend kunnen worden.*

6 Reële getallen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

7 Machten met gehele exponenten en reëel grondtal definiëren en de rekenregels voor gehele machten bewijzen en toepassen.

Link *Deze rekenregels werden in de eerste graad al gebruikt voor rationale grondtallen.*

8 De positieve en de negatieve vierkantswortel van een positief reëel getal definiëren en de rekenregels voor vierkantswortels formuleren, bewijzen en toepassen.

Wenk *Een zinvolle toepassing is het wortelvrij maken van noemers wanneer die uit één of twee termen bestaan.*

Link *Het wortelvrij maken van noemers die uit twee termen bestaan, komt in de derde graad terug bij de deling van complexe getallen (3AL30).*

9 De derdemachtswortel van een reëel getal definiëren en berekenen.

Wenk *De invoering van derdemachtswortels maakt oefeningen met volume en lengte mogelijk (ribbe van een kubus, straal van een bol…).*

U *Rekenregels voor derdemachtswortels formuleren en bewijzen.*

Wenk *Eventueel kunnen de rekenregels gegeven en gebruikt worden, maar zonder bewijs.*

10 De grootte-orde van reële getallen schatten en reële getallen afronden in concrete contexten.

2AL02 – Vergelijkingen en ongelijkheden van de eerste graad (9 u)

1 Vergelijkingen van de eerste graad in één onbekende grafisch en algebraïsch oplossen.

Wenk *Bij het algebraïsch oplossen komen ook vergelijkingen met één parameter aan bod.*

Wenk *Het is de bedoeling dat leerlingen dit automatiseren en niet steeds blijven terugvallen op de balansmethode.*

2 Ongelijkheden van de eerste graad in één onbekende grafisch en algebraïsch oplossen.

Wenk *Bij het algebraïsch oplossen kunnen ook ongelijkheden met één parameter aan bod komen.*

3 Vraagstukken oplossen die leiden tot een vergelijking of een ongelijkheid van de eerste graad met één onbekende.

4 Bij een formule één veranderlijke schrijven in functie van de andere.

Wenk *De formules hoeven niet lineair te zijn in de variabelen: met behulp van vierkantswortels of derdemachtswortels kunnen ook formules met kwadraten en derdemachten omgevormd worden. Bij concrete contexten is het teken van de variabelen gekend.*

2AL03 – Stelsels (5 u)

1 Een stelsel van twee eerstegraadsvergelijkingen met twee onbekenden grafisch en algebraïsch oplossen met de gelijkstellings-, substitutie- en combinatiemethode.

2 Vraagstukken oplossen die leiden tot een stelsel van twee eerstegraadsvergelijkingen met twee onbekenden.

Wenk *Een stelsel oplossen door gelijkstellen zal vooral nuttig zijn bij vraagstukken waarbij het snijpunt van de grafieken van eerstegraadsfuncties gezocht wordt, of van rechten met vergelijking van de vorm $y = mx + q$.*

2AL04 – Merkwaardige producten en ontbinden in factoren (7 u)

1 Een veelterm ontbinden in factoren door een gemeenschappelijke factor af te zonderen.

2 Een veelterm ontbinden in factoren door merkwaardige producten te gebruiken: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$; $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.

Link *In de derde graad zal een formule voor $(a \pm b)^n$ met $n \in \mathbb{N}$ worden opgesteld (3DI20).*

3 Een veelterm ontbinden in factoren door termen samen te nemen.

Wenk *Een veelterm ontbinden in factoren door termen samen te nemen.*

Analyse (3e jaar)

2AN01 – Basisbegrippen van functies (5 u)

1 Uitleggen wat een functie is en het verband leggen tussen verschillende representaties ervan: verwoording, tabel van enkele functiewaarden, grafiek en voorschrift.

Wenk *Het is nuttig een functie te zien als een afbeelding (input-output-model), waarbij de onafhankelijke variabele wordt afgebeeld op de afhankelijke variabele.*

2 Kenmerken van een functie analyseren aan de hand van de grafiek: domein, bereik, nulwaarden, tekentabel, extrema en stijgen en dalen.

2AN02 – Eerstegraadsfuncties (12 u)

1 De definitie van een eerstegraadsfunctie geven en haar grafiek tekenen.

Wenk *Het begrip constante functie kan hier aangebracht worden als het speciale geval waarbij de coëfficiënt van x nul is. Dit is echter geen eerstegraadsfunctie.*

Wenk *Is de constante term nul, dan is een eerstegraadsfunctie $y = ax$ in verband te brengen met recht evenredige grootheden, met a de evenredigheidsconstante. Er is enkel sprake van evenredige grootheden wanneer de rechte door de oorsprong gaat.*

Wenk *Een verticale rechte is geen functiegrafiek en dus ook niet de grafiek van een eerstegraadsfunctie.*

2 Een representatie (voorschrift, grafiek, tabel, verwoording in concrete contexten) van een eerstegraadsfunctie bepalen als een andere representatie gegeven is.

Wenk *Het bepalen van de coëfficiënten a en b in $f(x) = ax + b$ op basis van de grafiek is essentieel: a als richtingscoëfficiënt van de rechte, b als ordinaat (y-coördinaat) van het snijpunt van de grafiek met de y-as.*

3 De kenmerken van eerstegraadsfuncties onderzoeken aan de hand van de verschillende representaties: nulwaarden, domein en bereik, stijgen en dalen, tekentabel.

4 Vraagstukken oplossen die aanleiding geven tot een eerstegraadsfunctie.

Wenk *Geeft een probleem aanleiding tot een gelijkheid $f(x) = g(x)$, met f en g eerstegraadsfuncties, dan is het voor het grafisch oplossen van die vergelijking niet nodig om te herleiden op 0, maar kan het snijpunt van de grafieken van beide functies grafisch bepaald worden.*

Statistiek (3e jaar)

2TW01 – Beschrijvende statistiek (10 u)

1 Het onderscheid maken tussen numerieke (discrete of continue) en categorische (nominale of ordinale) grootheden en op basis hiervan gepaste grafische voorstellingen kiezen: histogram, boxplot, lijndiagram, cirkeldiagram, staafdiagram… Het verband tussen deze voorstellingen en absolute- of relatieve-frequentietabellen leggen.

Wenk *Numerieke grootheden worden ook kwantitatieve grootheden genoemd, categorische worden ook kwalitatieve grootheden genoemd.*

Wenk *Ook andere grafische voorstellingen kunnen behandeld worden: dotplots, cumulatieve frequentiediagrammen, strookdiagrammen…*

Wenk *Bij de frequentietabellen zal, afhankelijk van de gewenste analyse, met absolute of relatieve frequenties gewerkt moeten worden, evenals met gegroepeerde of niet-gegroepeerde gegevens. Leerlingen moeten dergelijke tabellen kunnen interpreteren en koppelen aan de passende grafische voorstelling.*

Wenk *De klemtoon ligt veeleer op het analyseren van gegevens aan de hand van verschillende voorstellingen, dan op het zelf maken van die voorstellingen. Dit laatste kan met ICT gebeuren, rechtstreeks vanuit de volledige dataset. Ook de frequentietabellen worden best met ICT gemaakt, niet met de hand.*

Wenk *Dankzij het gebruik van ICT kan ook gemakkelijker met realistische datasets gewerkt worden, in plaats van met kunstmatige en kleine gegevensreeksen.*

Wenk *Het bespreken van voor- en nadelen van verschillende voorstellingen van eenzelfde dataset kan extra inzicht opleveren in de betekenis en waarde van beschrijvende statistiek.*

2 Van een reeks gegevens centrummaten (gemiddelde, mediaan en modus) en spreidingsmaten (standaardafwijking, interkwartielsafstand en variatiebreedte) bepalen en interpreteren.

Wenk *Na het aanbrengen van de formules en eventueel een kleine manuele oefening, kan best opnieuw ICT ingeschakeld worden voor alle rekenwerk, zodat alle aandacht kan gaan naar het analyseren van de gegevens op basis van centrum- en spreidingsmaat.*

Wenk *Het is belangrijk verschillende numerieke samenvattingen voor eenzelfde dataset met elkaar te vergelijken, om zo de voor- en nadelen van verschillende maten te achterhalen. Zo kan bijvoorbeeld vastgesteld worden dat uitschieters (sterk afwijkende waarden) een grote impact hebben op gemiddelde en standaardafwijking; de mediaan en interkwartielafstand zijn veel robuuster in de aanwezigheid van uitschieters.*

Wenk *Het effect van uitschieters kan een aanleiding vormen om in te gaan op de 'verdeling' van gegevens, waarbij de vorm (symmetrisch of scheef) een indicatie geeft van welke centrum- en spreidingsmaten beter geschikt zijn.*

3 Klassieke misleidende grafische en numerieke voorstellingen herkennen en verklaren.

Wenk *Klassieke misleidingen zijn: het niet volledig weergeven van de assen, het gebruiken van een niet-gepast schema (bijvoorbeeld een cirkeldiagram bij procentuele gegevens die niet 100% als som hebben), het gebruiken van gemiddelden bij gegevens met uitschieters...*

4 Het verband tussen twee numerieke grootheden voorstellen in een spreidingsdiagram, een trendlijn met ICT bepalen en interpreteren. Bij een lineair verband de correlatiecoëfficiënt interpreteren als een maat voor de samenhang.

Wenk *Dit is een informele kennismaking. Het is niet nodig dat leerlingen de formule voor de correlatiecoëfficiënt kennen of weten hoe de vergelijking van een regressierechte wordt gevonden. Alle berekeningen gebeuren door ICT en leerlingen interpreteren, bij een lineair verband, de correlatiecoëfficiënt.*

Wenk *Bij deze kennismaking kunnen ook andere dan lineaire verbanden geïllustreerd worden, zoals bijvoorbeeld omgekeerd evenredigheid..*

Discrete wiskunde (3e jaar)

2DI01 – Propositielogica (4 u)

1 Van uitspraken beoordelen of het proposities (logische uitspraken) zijn.

2 De betekenis kennen van de logische bewerkingen (connectieven) waarmee proposities kunnen worden samengesteld: en (conjunctie), of (disjunctie), niet (negatie), daaruit volgt (implicatie), is equivalent met (equivalentie).

Wenk *Het is belangrijk te vermelden dat de logische 'of' (inclusief) een andere betekenis heeft dan in de omgangstaal (exclusief). Hetzelfde geldt voor een implicatie: in de omgangstaal komt een 'als... dan...' uitspraak vaak overeen met een equivalentie in de logica.*

3 De waarheidswaarde van samengestelde proposities bepalen met waarheidstabellen.

4 Nagaan of en bewijzen dat een uitspraak een tautologie of een contradictie is en dat twee proposities logisch equivalent zijn.

Wenk *Als oefening kunnen enkele bekende tautologieën of logische wetten aangebracht worden: contrapositie, wet van de dubbele negatie, wetten van De Morgan…*

U *Logische poorten kennen en logische schakelingen analyseren.*

Wenk *Om te onderzoeken wat een logische schakeling doet, maak je de vertaling naar propositielogica. Je kunt hierbij ook de link leggen met Boole-algebra en werken met logische vergelijkingen, waarbij bijvoorbeeld de AND-schakeling naar een vermenigvuldiging vertaald wordt.*

Meetkunde (4e jaar)

2ME06 – Goniometrie (14 u)

1 Het concept georiënteerde hoek definiëren en georiënteerde hoeken voorstellen in een goniometrische cirkel.

2 De goniometrische getallen sinus, cosinus en tangens van een georiënteerde hoek definiëren met behulp van een goniometrische cirkel. De tangens ook meetkundig voorstellen.

Wenk *Het verband tussen de hellingshoek en richtingscoëfficiënt van een rechte (zie 2ME08) kan nu al aangebracht worden. Ook kan hier al de hoek tussen twee rechten worden berekend.*

U *De goniometrische getallen cotangens, secans en cosecans definiëren.*

Wenk *De meetkundige voorstelling van de cotangens kan ook afgeleid worden, gezien de grote gelijkenis met die van de tangens.*

3 De grondformule van de goniometrie formuleren, bewijzen en toepassen.

Wenk *Het is nuttig de formules die het verband uitdrukken tussen tangens en cosinus of tussen cotangens en sinus af te leiden uit de grondformule. Samen met de grondformule worden deze formules vaak gebruikt om uit één goniometrisch getal van een hoek (en het kwadrant van die hoek) het andere te berekenen, zonder de hoek zelf met een rekentoestel te bepalen.*

4 De verbanden tussen de goniometrische getallen van tegengestelde, supplementaire en complementaire hoeken formuleren, verklaren en toepassen.

Wenk *Aanvullend kunnen hier de verbanden tussen de goniometrische getallen van antisupplementaire en anticomplementaire hoeken geformuleerd, verklaard en toegepast worden.*

5 Goniometrische uitdrukkingen vereenvoudigen en identiteiten bewijzen met behulp van de geziene formules.

Wenk *Hier kunnen ook algebraïsche vaardigheden, zoals het herkennen van merkwaardige producten, ontbindingstechnieken of het rekenen met breuken, opnieuw aan bod komen.*

2ME07 – Driehoeksmeting in willekeurige driehoeken (8 u)

1 De sinus- en de cosinusregel formuleren en bewijzen voor willekeurige driehoeken.

2 Bij het oplossen van vraagstukken de sinus- en cosinusregel gepast toepassen.

Wenk *Bij het gebruik van de sinusregel zijn soms twee supplementaire hoeken mogelijk. Deze situatie kan via een tekening geïllustreerd worden. Er is ook een verband met de congruentiekenmerken van een driehoek.*

Wenk *Ook ruimtelijke problemen kunnen behandeld worden.*

2ME08 – Afstanden en hoeken, onderlinge ligging in het vlak (8 u)

1 Met behulp van de tangens de hellingshoek of de richtingscoëfficiënt van een rechte berekenen, wanneer één van beide gegeven is.

2 De hoek tussen twee rechten berekenen.

3 Het verband tussen de richtingscoëfficiënten bij loodrechte stand van twee rechten, niet evenwijdig met de assen, opstellen (met bewijs) en gebruiken in toepassingen.

Wenk *Mogelijke toepassingen zijn: het opstellen van de vergelijking van een loodlijn op een rechte, van een middelloodlijn op een lijnstuk of de hoogtelijn uit een hoekpunt van een driehoek.*

Link *Loodrechte stand kan ook worden onderzocht met behulp van het inproduct van vectoren (zie 2ME12).*

4 De formule voor de afstand tussen punt en rechte bewijzen en gebruiken in toepassingen. (Indicatorleerstof)

Wenk *Zowel het bewijs van de formule, als de vereiste algebraïsche beheersing om vlot met absolute waarden en ingewikkelde formules te werken, maken dat dit onderdeel als 'indicatorleerstof' is aangeduid, een interessante manier om de wiskundige weerbaarheid van een leerling te testen met het oog op de derde graad.*

Wenk *Een uitdagende toepassing is: een parabool beschrijven als meetkundige plaats en er via die weg een vergelijking van opstellen.*

5 Vergelijkingen opstellen van de bissectrices van een rechtenpaar. (Indicatorleerstof)

Wenk *Omwille van de combinatie van meetkundig redeneren (meetkundige plaatsen) en algebraïsch rekenwerk (breuken, wortels, absolute waarden), is dit leerstofonderdeel als indicatorleerstof aangeduid.*

2ME09 – De cirkel – synthetisch (13 u)

1 Eigenschappen i.v.m. apothema, straal en koorde onderzoeken, bewijzen en toepassen.

Wenk *Mogelijke eigenschappen zijn: de middelloodlijn van een koorde is een middellijn, een middellijn staat loodrecht op een koorde als en slechts als deze de koorde middendoor deelt, de koorden zijn even lang als en slechts als de apothema's even lang zijn...*

2 Bewijzen dat de loodlijn op een middellijn van een cirkel, door het eindpunt ervan, een raaklijn is en, omgekeerd, dat een raaklijn loodrecht staat op de middellijn door het raakpunt.

Wenk *Een raaklijn aan een cirkel wordt gedefinieerd als een rechte die één punt gemeenschappelijk heeft met de cirkel.*

Wenk *Deze eigenschappen laten toe om een raaklijn aan een cirkel in een punt van de cirkel te karakteriseren als de rechte die op een afstand gelijk aan de straal van het middelpunt van de cirkel ligt, wat een analytische manier oplevert om raaklijnen te bepalen.*

Wenk *Het 'omgekeerde bewijs' is een bewijs uit het ongerijmde (doel A1).*

3 Bewijzen dat de raaklijnen uit een punt aan een cirkel even lang zijn.

Wenk *Deze eigenschap kan gebruikt worden om een constructie met passer en liniaal op te stellen voor de raaklijnen uit een punt aan een cirkel.*

Wenk *Aansluitend bij deze eigenschap kan de macht van een punt ten opzichte van een cirkel gedefinieerd, onderzocht en bewezen worden.*

4 Eigenschappen in verband met middelpuntshoeken en omtrekshoeken onderzoeken, bewijzen en toepassen.

Wenk *Aansluitend kunnen hier nog andere eigenschappen bewezen worden: de overstaande hoeken van een koordenvierhoek zijn supplementair, de kleinste hoek tussen een raaklijn en een koorde van een cirkel is gelijk aan de helft van de kleinste middelpuntshoek op die koorde, eigenschappen in verband met buiten- en binnenomtrekshoeken…*

Wenk *De volgende constructies kunnen worden uitgevoerd en verklaard: een rechthoekige driehoek waarvan de schuine zijde gegeven is, de middelevenredige tussen twee gegeven lijnstukken.*

5 De omgeschreven cirkel van een driehoek construeren en deze constructie verklaren.

Wenk *Uit de verklaring van de constructie volgt dat door drie niet-collineaire punten juist één cirkel gaat.*

Wenk *Gegeven een driehoek kan de straal van de omgeschreven cirkel berekend worden met de sinusregel en de eigenschap van omtrekshoeken op dezelfde boog.*

U1 De ingeschreven cirkel van een driehoek construeren en deze constructie verklaren.

6 Eigenschappen van regelmatige *n*-hoeken onderzoeken en gebruiken.

Wenk *Het volstaat om, door redeneren, de middelpuntshoek, de hoek, de zijde en het apothema van een regelmatige n-hoek te kunnen berekenen.*

Wenk *Door aan te tonen dat de zijde van een regelmatige zeshoek gelijk is aan de straal, ontdekken leerlingen een constructie voor regelmatige zeshoeken met passer en liniaal.*

Wenk *Met behulp van de constructie van de omgeschreven cirkel van een driehoek kan beargumenteerd worden dat de hoekpunten van een regelmatige n-hoek op een cirkel liggen.*

Wenk *Ook de omtrek en oppervlakte van een regelmatige n-hoek kan berekend worden. Hier kan verwezen worden naar Archimedes die in de 3e eeuw vóór Christus een benadering voor π berekende met een regelmatige 96-hoek.*

U2 De onderlinge ligging van twee cirkels onderzoeken.

2ME10 – De cirkel – analytisch (7 u)

1 Een vergelijking van een cirkel opstellen als het middelpunt en de straal gegeven zijn.

2 Het middelpunt en de straal bepalen van een cirkel waarvan een algemene vergelijking gegeven is.

Wenk *Een mogelijke toepassing is het berekenen van de coördinaten van de snijpunten van een cirkel en een rechte of van twee cirkels.*

3 Een vergelijking opstellen van de raaklijn in een punt van een cirkel.

Wenk *Er kan een loodlijn op de middellijn door het raakpunt opgesteld worden, of er kan gebruik gemaakt worden van het feit dat de afstand van de raaklijn tot het middelpunt de straal is. Alternatief kan ook geëist worden dat de vierkantsvergelijking die de gemeenschappelijke punten van de rechte en de cirkel oplevert discriminant nul heeft. Alle methoden vereisen een goede beheersing van de leerstof en van algebraïsche vaardigheden, waardoor dit stuk als indicatorleerstof is aangeduid.*

U Vergelijking van de raaklijnen uit een punt aan de cirkel

Wenk *Dit uitbreidingsdoel is nog uitdagender dan het vorige en is ook indicatorleerstof.*

2ME11 – Ruimtemeetkunde (8 u)

1 De onderlinge ligging onderzoeken van twee rechten, van een rechte en een vlak en van twee vlakken in de ruimte.

Wenk *Het kan nuttig zijn de onderlinge ligging te onderzoeken in concrete situaties, zoals in een kubus of ander gekend lichaam.*

2 Eigenschappen i.v.m. de ligging van twee rechten, van rechte en vlak en van twee vlakken in de ruimte onderzoeken en deze correct formuleren.

Wenk *De eigenschappen kunnen zo gekozen worden dat ze (1) ruimtelijk inzicht aanscherpen, (2) redeneeroefeningen en kleine bewijzen mogelijk maken of (3) de constructie van de doorsnede van een vlak met een veelvlak kunnen verantwoorden.*

Link *Gelijkaardige eigenschappen komen opnieuw aan bod in de derde graad (zie 3ME20 en 3ME30).*

3 De hoek tussen rechten in de ruimte definiëren en berekenen in concrete contexten.

4 Loodrechte stand van twee rechten en van rechte en vlak in de ruimte definiëren.

Wenk *Hier wordt ook uitgelegd dat een rechte loodrecht staat op een vlak als die rechte loodrecht staat op twee snijdende rechten van dat vlak. Dit wordt gebruikt om loodrechte stand te onderzoeken in concrete situaties.*

U *Vertrekkend van een concrete tweedimensionale voorstelling de doorsnede bepalen van een veelvlak en een vlak.*

2ME12 – Vectoren (indicatorleerstof) (11 u)

Opm. *Dit hele onderdeel is als indicatorleerstof gemarkeerd, gezien het moeilijkheidsniveau van het redeneren met vectoren, het combineren van verschillende soorten vergelijkingen van rechten en het nieuwe concept inproduct.*

1 De vectoriële vergelijking en parametervergelijkingen van rechten opstellen als een punt en de richting of als twee punten gegeven zijn.

Wenk *Leerlingen zetten een cartesiaanse vergelijking van een rechte om in een stel parametervergelijkingen of een vectoriële vergelijking en omgekeerd.*

2 De evenwijdigheid van rechten onderzoeken op basis van hun richtingsvectoren of richtingsgetallen.

3 Het inproduct (scalair product) van twee vectoren definiëren en de analytische uitdrukking afleiden.

Wenk *Het is zinvol om de benaming inproduct te verklaren: het <u>in</u>product van twee vectoren wordt groter naarmate deze vectoren meer <u>in</u> elkaars verlengde liggen. Dit kan helpen om de benaming te onthouden.*

4 De hoek tussen twee vectoren definiëren en berekenen in concrete situaties.

5 De loodrechte stand van rechten onderzoeken met behulp van het inproduct van hun richtingsvectoren.

Wenk *Een mogelijke verdieping bestaat erin aan te tonen dat de vector $\vec{n}(u, v)$ loodrecht staat op de rechte met algemene vergelijking $ux + vy + w = 0$. We noemen $\vec{n}(u, v)$ een normaalvector van de rechte. Met normaalvectoren kan ook onderzocht worden of twee rechten loodrecht op elkaar staan wanneer enkel de algemene vergelijking gekend is.*

Algebra (4e jaar)

2AL05 – Vergelijkingen en ongelijkheden van de tweede graad (11 u)

1 Vergelijkingen van de tweede graad (vierkantsvergelijkingen) grafisch en algebraïsch oplossen. De discriminantformule afleiden en gebruiken.

Wenk *Onvolledige vierkantsvergelijkingen kunnen sneller zonder discriminant opgelost worden. Het is belangrijk dat leerlingen de meest efficiënte methodes leren gebruiken en ze voldoende automatiseren.*

Wenk *De historische verklaring van het woord 'vierkantsvergelijking' kan aan de hand van de afleiding van de discriminantformule gegeven worden.*

Wenk *Bij het algebraïsch oplossen komen best ook vergelijkingen met één parameter aan bod.*

2 De formules voor de som en het product van de oplossingen van een vierkantsvergelijking opstellen en gebruiken.

3 Tweedegraadsuitdrukkingen wanneer mogelijk ontbinden in factoren van de eerste graad.

4 Ongelijkheden van de tweede graad grafisch en algebraïsch oplossen.

Wenk *Bij het algebraïsch oplossen kan een tekentabel gebruikt worden.*

5 Hogeregraadsvergelijkingen oplossen die met een eenvoudige substitutie te herleiden zijn tot vierkantsvergelijkingen, o.a. bikwadratische vergelijkingen.

2AL06 – Veeltermen (14 u)

1 Het begrip veelterm en de graad ervan algemeen definiëren.

Wenk *Er kan voor gekozen worden het sommatieteken te gebruiken om een veelterm beknopt te noteren.*

2 Bewerkingen met veeltermen uitvoeren: som, product.

3 De Euclidische deling van veeltermen uitvoeren met behulp van een staartdeling.

Wenk *De uniciteit van het quotiënt en de rest hoeven niet bewezen te worden.*

4 De reststelling bij deling van een veelterm door $x - a$ bewijzen en toepassen.

Wenk *Uit de reststelling volgt dat een veelterm deelbaar is door $x - a$ als a een nulwaarde ervan is.*

Wenk *Een nuttige uitbreiding van het bovenstaande is dat als a en b nulwaarden zijn van de veelterm, die veelterm deelbaar is door $(x - a)(x - b)$. Deze eigenschap kan vermeld, maar ook bewezen worden.*

5 Het quotiënt en de rest bij deling door $x - a$ verkort noteren met het schema van Horner.

Wenk *Bij veeltermen met gehele coëfficiënten kan voor het vinden van delers van de vorm $x - a$ met a geheel gebruik gemaakt worden van de eigenschap dat a een deler moet zijn van de constante term van de veelterm.*

6 De tweetermen $a^3 \pm b^3$ ontbinden in factoren.

U *De tweeterm $a^n - b^n$ en de tweeterm $a^n + b^n$ met n oneven ontbinden in factoren.*

7 Alle geziene technieken voor het ontbinden in factoren toepassen: afzonderen, merkwaardige producten, tweedegraadsveeltermen, samennemen, delers $x - a$.

2AL07 – Rationale lettervormen (6 u)

Opm. *Dit hele onderdeel is als indicatorleerstof gemarkeerd, omdat solide rekenvaardigheden belangrijk zijn in studierichtingen met een sterke wiskundecomponent.*

1 Rationale lettervormen (breuken met letters) vereenvoudigen door gemeenschappelijke factoren weg te delen.

2 Rationale lettervormen optellen, vermenigvuldigen en delen.

Analyse (4e jaar)

2AN03 – Tweedegraadsfuncties (18 u)

1 De grafiek van $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ door middel van transformaties opbouwen vanuit de parabool $y = ax^2$ en daarbij het effect onderzoeken op de top, de symmetrieas en de kromming van de parabool (dal- of bergparabool).

Wenk *De vergelijking $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$ wordt de topvergelijking van de parabool genoemd.*

2 Aantonen dat elke tweedegraadsfunctie $f(x) = ax^2 + bx + c$ als grafiek een parabool heeft en de x-coördinaat van de top en een vergelijking van de symmetrieas berekenen.

Wenk *De vergelijking $y = ax^2 + bx + c$ herschrijven als $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$ en omgekeerd.*

Wenk *Er wordt een algemene formule opgesteld voor de x-coördinaat van de top in functie van a en b.*

Wenk *Uit het voorschrift of de grafiek van een tweedegraadsfunctie moeten leerlingen de andere representatie kunnen afleiden. Interessante punten om een voorschrift te vinden, zijn: de top, het snijpunt met de y-as, de nulpunten. Ook de symmetrieas kan nuttig gebruikt worden.*

3 Kenmerken van (de grafiek van) tweedegraadsfuncties analyseren en grafisch interpreteren: domein, bereik, nulwaarden, tekenverloop, toenemende/afnemende stijging/daling, extremum (top), symmetrie.

4 Problemen oplossen die aanleiding geven tot tweedegraadsvergelijkingen of -ongelijkheden of tot tweedegraadsfuncties, extremumvraagstukken.

Wenk *Een mogelijke toepassing is ook het berekenen van de snijpunten van rechten en parabolen of van twee parabolen.*

Wenk *Een andere toepassing is het opstellen en analyseren van een trendlijn bij twee variabelen met kwadratisch verband.*

2AN04 – Functies $f(x) = \frac{c}{x}$ (2 u)

1 Kenmerken van de grafiek van $f(x) = \frac{c}{x}$ analyseren en grafisch interpreteren: domein, bereik, tekenverloop, toenemend/afnemend stijgen/dalen, symmetrie, gedrag op oneindig, gedrag in de buurt van 0.

Discrete wiskunde (4e jaar)

2DI02 – Telproblemen (5 u)

1 Telproblemen oplossen door te tellen met Venndiagrammen en boomdiagrammen.

Wenk *Ook andere diagrammen kunnen gebruikt worden: kruistabellen, wegendiagrammen…*

2 Telproblemen oplossen door toepassing van de somregel, de productregel en/of de complementregel.

Wenk *Telproblemen kunnen gebruikt worden om kansen te berekenen als de verhouding van het aantal gunstige uitkomsten tot het totale aantal uitkomsten, zoals dat ook al werd gedaan in de eerste graad.*